平面図形の幾何学と歴史

1180496　山岡　緑

高知工科大学マネジメント学部

１．概要

本研究では、定理の起源に迫ることで、より理解を深めることを目的とする。

２．背景

小学校から高等学校まで数学の基礎を学び、大学ではより発展した数学を学習してきた。だが、数学の歴史についてはあまり学習していない。そこで数学の歴史とこれまで学んだ定理や難易度の高い定理を結びつけることで、より理解を深めることが出来るのではないかと考えた。本研究では、数学の分野のうち、幾何学の歴史と定理を結び付けて考えていく。

３.目的

本研究では、幾何学の高度な定理の証明の歴史を追うことで、初等幾何をはじめとする幾何学の理解を深めることを目的とする。

４．幾何学とは

現代の数学は大きく四つの分野に分けることが出来る。

・代数学…数、方程式

・幾何学…図形

・解析学…関数、微積分

・その他（応用数学、離散数学など）

なかでも幾何学は図形や空間の性質を研究する数学の分野である。

５．数学の歴史

一万年以上前から、人類は農耕によって生活を支えるようになり、農耕を行う際、量を計る必要に迫られた。また、強大な国家の成立により、農地面積の計算や税金の課し方などで大規模な計算が必要になり、数学が必要となった。

なかでも、古代バビロニア、エジプト、古代ギリシアで数学が大きく発展した。

５．１　古代バビロニア数学

古代バビロニア文明は4000年以上前に遡り、驚くほどレベルの高い数学を展開していた。エジプト、インド、中国よりも数学の起源が古く、世界最古の数学と言われており、基本的な計算の仕方や問題の解法などを確立した。

例えば、二次方程式の解法や三平方の定理などが発見されていた。

５．２　エジプト

ヘロドトスの著書「歴史」には次のことが書かれている。「王は各自に平等な正方形の班地をあてがって（中略）、毎年年貢を納める義務を課してそれを収入の財源にしたという。もし河が何人かの班地の一部を持ち去るようなことがあれば、（中略）王はその土地がいかほど減少したかを測量させたものである。私はそれが幾何学の案出された淵源であり、それがギリシアへ渡来したものと考える」このことから、エジプトにおける土地の測量が幾何学の起源といわれている。

５．３　古代ギリシア

古代ギリシアでは、古代バビロニアやエジプトなどの数学を学び、数学の在りかたを変えた。それは、「数学的な事実を一般に成り立つ‘定理’として書き表しそれを証明する」という考えである。

古代バビロニアにも一応の証明はあったが、古代ギリシアは以下の点で異なっている。

・どんなことでも厳密に証明するべきであるという態度

・証明技術の洗練

・大体ではなく、物事の本質を見るという姿勢

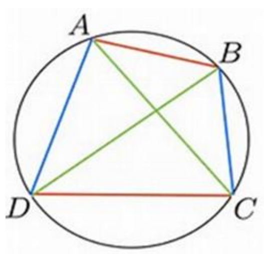
また、古代ギリシアでは幾何学が重んじられており、ピタゴラスの定理が証明されるなど、大きく発展を遂げた。紀元前三世紀ごろには、ユークリッドの「原論」が成立した。

ギリシアで発見された定理の一つとして、次のトレミーの定理が挙げられる。

（トレミーの定理）

円に接する四角形 ABCD の辺 AB,BC,CD、DA と対角線 AC,BD の長さに、次の関係がある。

AB・CD＋BC・DA＝AC・BD



６．プセーポイ数学

古代最初の証明は、重ね合わせのような形で行われていた。このような初期的な証明に関連して、小石を並べて数の性質を調べたプセーポイ数学について説明する。

● ○ ● ○ ●　　$1=1^2$
○ ○ ● ○ ●　　$1+3=4=2^2$
● ● ● ○ ●　　$1+3+5=9=3^2$
○ ○ ○ ○ ●　　$1+3+5+7=16=4^2$
● ● ● ● ●　　$1+3+5+7+9=25=5^2$

上図のように、左上の小石一個から始めて、小石を順次カギ型に並べると、その度に一回り大きな正方形ができる。

小石の個数を数えて次の一般公式を得ることが出来る。

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

奇数を１から順に加えると、奇数の個数の２乗に等しくなる。次に、このうちの２つの式を並べる。

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+7+9=25=5^2$

ここで最後に加えた奇数９を3^2と書き直して、

$(1+3+5+7)+9=4^2+3^2=5^2$

順序を変えると、$3^2+4^2=5^2$となる。

同様のことを、$25=5^2$で終わるところまで行うと、

$1+3+5+\cdots+21+23=144=12^2$

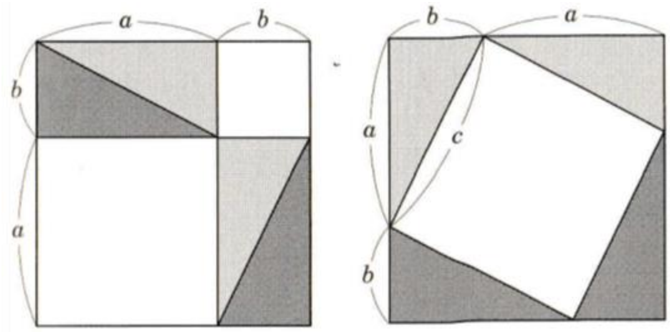
$1+3+5+\cdots+21+23+25=169=13^2$

となる。次は、$49=7^2$で$24^2+7^2=25^2$が得られる。

以上のことから、小石を並べるだけでピタゴラスの３つの組と呼ばれる直角三角形の３辺をなす自然数の組が無数にたくさん存在することが証明できる。

７．ピタゴラスの定理

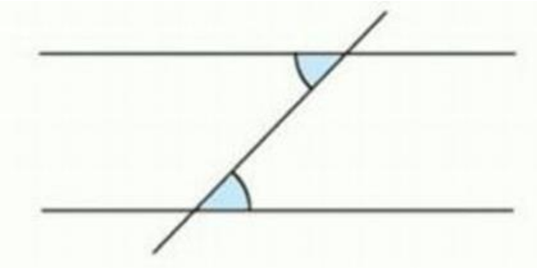
直角三角形の３辺の長さを a, b, c（c が斜面）とするとき、$a^2+b^2=c^2$が成り立つというピタゴラスの定理に、図を見るだけで分かる証明が伝えられている。



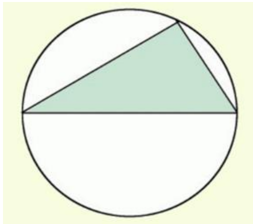
８．ユークリッド「原論」

単なる幾何学書ではなく、当時の数学全体を体系的に記述した貴重な世界文化遺産である。以下は、「原論」に含まれる命題の一部である。

［命題Ⅰ－２９］平行線の錯角は等しい。



［命題Ⅲ－３１］直径の円周角は直角である。



上記の初等幾何も原論に含まれている。

９．デカルト

デカルトもユークリッドと同様に、幾何学を大きく発展させた一人である。

１６３７年に「我思う、ゆえに我あり」で有名な方法序説を出版し、近世合理主義哲学の基礎を築いたとされる。この方法序説は屈折学、気象学、幾何学から成り立ち、幾何学は座標を使って幾何学の問題を代表的に解く「解析幾何学」を創設したとされる重要な歴史書物であり、数学の歴史を変えたともいわれている。

また、方法序説にはとても重要なことが明記されている。その中の２つを紹介する。

９．１　記号代数学を完成

既知の定数を a, b, c…などアルファベットの初めての方で、未知数を x, y, z…などアルファベットの最後の方で表した。そして、デカルトは古代ギリシア以来の重い伝統である「次元へのこだわり」を取り払った。

次元へのこだわりとは、次の２つである。長さという量を２つ掛け合わせると面積になり、３つ掛け合わせれば、体積になるが、面積と長さを加えたり、面積と体積を加えたりすることは意味がないものとして固く禁じられていた。

デカルトによって可能になった表現法を使うと、$x^2=ax+b^2$

のように次元を揃えなければならなかったものが、

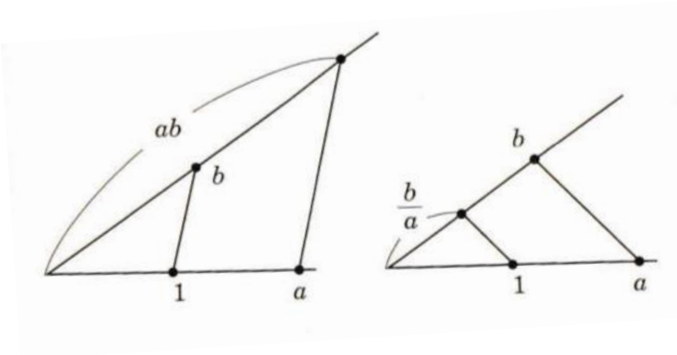
$y=x^3+ax^2+bx+c$ のように表すことが出来るようになった。

また、b^2、x^3のべき乗の表記もデカルトの創意である。

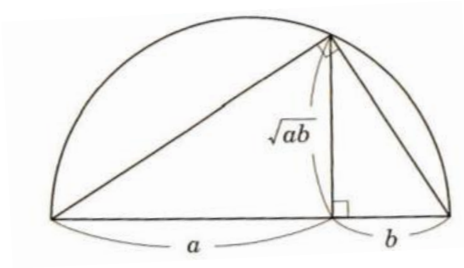
９．２　解析幾何学

古代ギリシアで a,b はいずれも線分の長さを表していたので､abはこのａとｂを二辺とする長方形の面積を表していた。だが､デカルトはそれらをすべて同じ種類の数と考え､a,b に別の図形的解釈を行った。

２つの正の値 a,b(a>b)と単位の長さ１が与えられたものとする。すると a,b の掛け算と割り算は次のように表すことが出来る。



a が線分の長さを表すと考える限り、$\sqrt{a}$は意味を持たなかった。だが、デカルトは平方根を下図のように作図した。



図形の演算をそれまでの量から独立させて、数の幾何として考え始めた。

座標で考えるには、

(１)数を一般的な文字であらわす。

(２)平面上の点を(１，２)のように数の組であらわす。

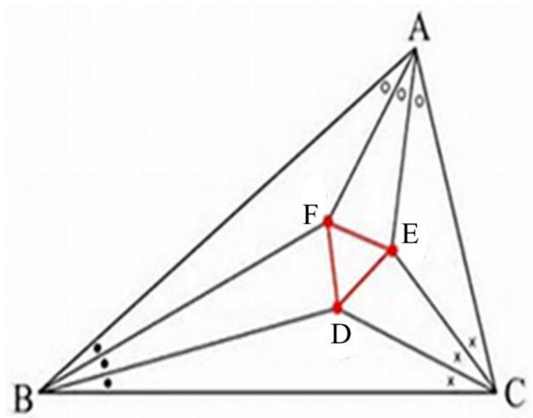
の２つが前提条件となるため、座標で考えるようになるまで多くの時間がかかったが、デカルトにより座標を用いる方法が広まった。

１０．モーレーの定理

モーレーの定理は１８９９年に発見されている。幾何学の定理がユークリッドによってほとんど紀元前三世紀には発見されていることを考えると、非常に発見が遅いことが分かる。この謎について考察していきたいと思う。

（定理）

三角形の各頂角の三等分線のうち、辺に近いもの同士の交点は正三角形をつくる。



１１　証明（モーレーの定理）

∠B＝3β、∠C＝3γとおく。∠B、∠C の三等分線のうち、辺 BC に近いもの同士の交点を D､遠いもの同士の交点を D`とおく。

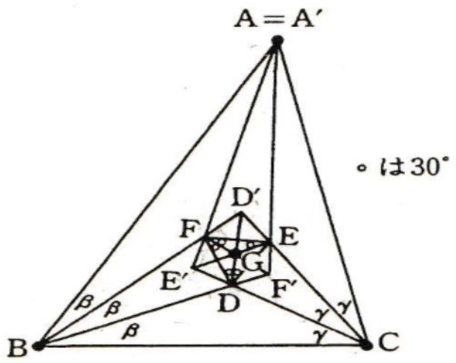


図３．２

D は△D`BC の内心である。したがって D`D は∠BD`C を二等分する。

BD`上、CD`上にそれぞれ点 F, E を

∠D`DF＝∠D`DE＝30°

となるようにとる。△D´DF と△D´DE において、辺 D´D は共通…①

D´D は∠BD´C を二等分するので、∠BD´D=∠CD´D…②

∠D´DF＝∠D´DE＝30° …③

①　～③より、一辺とその両端の角が等しいので、△D`DF≡△D`DE ゆえに、DE＝DF となり、

∠EDF＝∠D´DF＋∠D´DE＝60° なので△DEF は正三角形であ

る。

正三角形、△DEF の中心(重心)を G とおく。G は DD`上にある。EG と CD の交点を E´とおき、FG と BD の交点を F`とおく。さらに EF`と FE`の交点を A`とおく。

モーレーの定理を証明するには、「A`＝A であり、EF´、FE`が∠A の三等分線である。」ことを示せばよい。以下、このことを示すにあたり、次の命題を示しておく。

【命題】

△ABC の内心を I とするとき

∠BIC＝90° ＋1/2∠A

逆に、∠A の二等分線上の点 I´が

∠BI`C＝90° ＋1/2∠A

を満たすならば I`＝I となる。

【命題の証明】

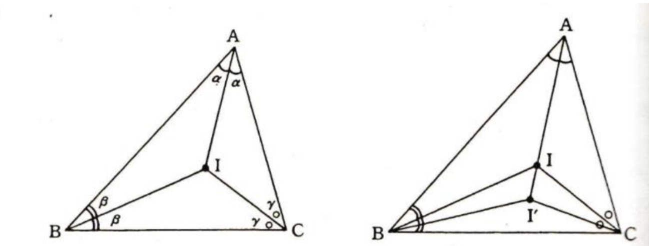


図３．３　　図３．４

∠A=2α、∠B=2β、∠C=2γとおくと図３．３において、

∠BIC＝180° −(β＋γ)

＝(2α＋2β＋2γ)−(β＋γ)

＝2α＋β＋γ

＝(α＋β＋γ)＋α

＝90° ＋α＝90° ＋1/2∠A

また、点 I`が∠A の二等分線上にあって、I`≠I のときは、∠BI`C≠∠BIC＝90° ＋1/2∠A である。(図 3.4) よって、∠BI`C＝90° ＋1/2∠A ならば、I＝I`である。

元に戻って「図 3.2 において､F は△F`A`B の内心である。」を示すには、命題により、次の(ⅰ)(ⅱ)を示せばよい。

(ⅰ)FF`は∠A`F`B の二等分線である。

(ⅱ)∠A`FB＝90° ＋1/2∠A`F`B… (1) が成り立つ。

まず(ⅰ)を示す。:△FDF′ と△FEF`において､G は正三角形△DEF の中心だから、∠GFD=∠GFE＝30° …①

また、△DEF は正三角形より DF=EF…②

FF´は共通…③

よって、①〜③より、二辺とその間の角が等しいので、△FDF`≡△FEF`とくに∠FF`D＝FF`E

次に(ⅱ)を示す。

∠A`FB

＝D`FE`(対頂角)

＝∠D`FE＋∠EFE`

＝(90° −∠FD`D)＋∠EFE`　[FE と DD`は直交]

＝(90° −∠FD`D)＋∠EDE`

＝ (90° −∠FD`D)＋∠EDD`＋∠D`DE`

＝ (90° −∠FD`D) ＋ (30° ＋∠D`DE`)

＝120° −∠FD`D＋∠D`DE`

＝120° −∠FD`D＋ (∠DD`C＋γ) [△CDD`の外角]

＝120° ＋γ… (2)　　[∠FD`D＝∠DD`C]

次に、△FDF`≡△FEF`より、

∠A`F`B＝2∠FF`D

＝2 (180° −∠DFF`−∠FDF`)

＝2 (180° −30° −∠FDF`)

＝300° −2∠FDF`

＝300° −2 (∠FDD`＋∠D`DF)

＝300° −2 (30° ＋∠D`DF`)

＝240° −2∠D`DF`

＝240° −2 (β＋∠BD`D)　[△D´BD の外角]

＝240° −2β−∠BD`C

＝240° −2β−∠BD`C

＝240° −2β− (180° −2β−2γ)

＝60° ＋2γ… (3)

(2) と (3) を比べると、

∠A`FB＝120° ＋γ

＝90° ＋30° ＋γ

＝90° ＋１/2 (60° ＋2γ)

＝90° ＋１/2∠A`F`B

したがって、等式 (１) が成り立つ。

以上から、(ⅰ) (ⅱ) が示され、命題より F は△F`A`B の内心となる。とくに、BF は∠A`BF`の二等分線であり、∠FBA`＝βとなる。

ゆえに、A`は BA 上にある。同様の議論で「E は△E`A`C の内心」となり、A`は CA 上にある。A`は BA 上にも CA 上にもあるので、A`＝A となる。

F が△F`AB の内心なので、∠BAF＝∠FAE

E が△E`AC の内心なので、∠BAF＝∠FAE

E が△E`AC の内心なので、∠CAE＝∠FAE

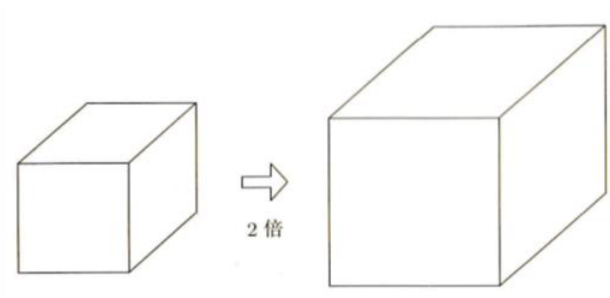
したがって、AE,AF は∠A の三等分線である。
以上より、モーレーの定理は成り立つ。

証明は非常に長いが、その導き方は中学校までの初等幾何を用いて解くことが出来る。そこで、証明ができなかったのではなく、定理自体が考察されなかったのではないかと推測する。

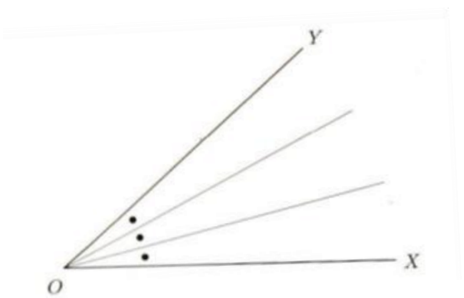
１２．ギリシアの三大作図問題

「定規、コンパスで求める図形や長さが作図できるだろうか。」という問題が作図問題である。ギリシアでは、定規とコンパスによる作図にこだわっており、その使用法が許容範囲にあることを示さなければ使えなかった。そのために、ギリシアでは、三大作図問題と呼ばれる問題が生まれた。それが次の三つである。

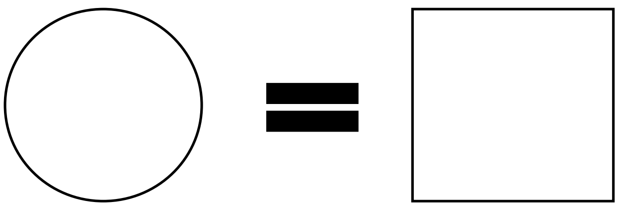
1、 立方体倍積問題…与えられた立方体の二倍の体積を持つ立方体(の一辺)を作図せよ



２、角の三等分問題…与えられた角の三等分線を定規とコンパスで作図せよ



３、円積問題…円と同じ面積を持つ正方形(の一辺)を作図せよ



定規とコンパスを規約通りに使ったのでは角の三等分線を求めることはできない。これは、１８３７年にワンツェルによって証明されている。他の２つの問題も作図不可能であることが知られている。

１３．考察

角の三等分問題より、角を三等分することを前提条件とする、モーレーの定理は古代ギリシアでは考察すらされなかったため、発見が遅れたと思われる。

引用文献

［１］現代数学社　「平面図形の幾何学」
著者　難波　誠
［２］共立出版　「コンパスと定規の幾何学　作図の楽しみ」
著書　瀬山　士郎
［３］日本評論社　「数学史の小窓」
著書　中村　滋
［４］ユークリッドの原論
http://www.rimath.saitamau.ac.jp/lab.jp/fsakai/he.html